## تعریف (احتمالات شرطی):

خودمونی بگم ... تمام بحث احتمال یک طرف، این قسمت هم یک طرف ... شیرینی احتمال شرطی را با یک مثال شروع می‌کنم بعد به تعریف‌ها و مثال‌ها و غیره می‌رسیم.

البته این مثال بعداً بیشتر توضیح داده خواهد شد ولی اکنون آن را حل کنید.

مثال.

فرض کنید آقای حسن‌آقا! دو فرزند داشته باشد.

راه می‌افتیم می‌رویم خونه آقای حسن آقا! پسری در را باز می‌کند، از او می‌پرسیم چه نسبتی با حسن‌آقا دارد می‌گوید پسر حسن آقا است احتمال آن را بیابید که هر دو فرزند حسن آقا پسر باشد.

حل.

عجله نکنید جواب $\frac{1}{2}$ نیست.

مثال.

فرض کنید خانه همان حسن آقا! می‌رویم و همان پسر در را باز می‌کند و خود را فرزند بزرگتر حسن آقا معرفی می‌کند در این صورت چه؟

حل.

در این صورت احتمال آنکه هر دو فرزند حسن آقا پسر باشند همان $\frac{1}{2}$ است چون حالت مطلوب (پ و پ) است و کل حالات {(پ و پ) و (د و پ)} است

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{2}$$

اما در مثال اول نمی‌دانیم کدام فرزند (بزرگتر یا کوچکتر) دم در آمده که پسر است پس کل حالات به این صـورت

است: {(پ و د) و (د و پ) و (پ و پ)} حالت مطلوب هم (پ و پ) است که دیده می‌شود احتمال آن $\frac{1}{3}$ است

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{3}$$

در این حالت اگر $E$ را پیشامد هر دو فرزند پسر بود تعریف کنیم

و $F$ را پیشامد لااقل یک فرزند پسر داشتن تعریف کنیم

مثال اول برابر می‌شـود بـا احتمـال رخ دادن $E$ بـه شـرطی کـه مـی‌دانـیم $F$ برقـرار اسـت و آن را بـه صـورت

$P(E|F)$ می‌نویسیم و می‌خوانیم:

احتمال $E$ به شرط $F$.

احتمال شرطی یعنی یک داده اضافی هم در مسئله داریم که در مثال اول همان پیشامد $F$ بود که می‌دانیم

رخ داده، حال با این شرط طبیعی است که ممکن است احتمال رخ داد $E$ عوض شود.

فرمول کلی که برای محاسبه $P(E|F)$ استفاده می‌شود این گونه حاصل می‌شود که:

اگر پیشامد $F$ رخ داده باشد، آنگاه برای این که $E$ رخ دهد لازم است که برآمد واقعی نقطه‌ای در $E$ و $F$ یعنی در

$E \cap F$ باشد. اکنون، با علم به این که $F$ رخ داده است، نتیجه می‌شود که فضای نمونه جدید ما کاهش یافتـه

است، بنابراین، احتملا این که پیشامد $E|F$ رخ دهد برابر است با احتمال $E \cap F$ نسبت به احتمـال $F$، یعنـی

تعریف زیر را داریم

تعریف

اگر $P(F) > 0$، آنگاه

$$P\left(E\left|F\right.\right)=\frac{P\left(EF\right)}{P\left(F\right)}$$

واضح است که مسائل احتمال شرطی را می‌توانید بدون این فرمول هم حل کنید اما توصیه می‌کنیم از این فرمول استفاده کنید تا به اشتباه نیفتید.

مثال.

سکه‌ای را دو بار پرتاب می‌کنیم. اگر فرض کنیم که هر چهار نقطه در فضای نمونه $S = \{(H , H), (H , T), (T , H), (T , T)\}$ دارای احتمال برابرند، احتمال شرطی این که در هر دو پرتاب شیر ظاهر شود، در صورتی که می‌دانیم پرتاب اول شیر بوده است چقدر است؟

حل.

اگر $E = \{(H , H)\}$ پیشامد هر دو پرتاب شیر و $F = \{(H , H), (H , T)\}$ پیشامد پرتاب اول شیر باشد، در این صورت احتمال مطلوب عبارت است از

$$\begin{aligned}P\left(E\left|F\right.\right)&=\frac{P\left(EF\right)}{P\left(F\right)}\\&=\frac{P\left(\{(H,H)\}\right)}{P\left(\{(H,H),(H,T)\}\right)}\\&=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

مثال.

کیسه‌ای محتوی ۱۰ مهره سفید، ۵ مهره زرد و ۱۰ مهره سیاه است.

مهره‌ای بتصادف از کیسه انتخاب شده و مشاهده می‌شود که این مهره سیاه نیست. احتمال این که مهره زرد باشد چقدر است.

حل.

فرض کنید $Y$ پیشامد زرد بودن و $\bar{B}$ پیشامد سیاه نبودن مهره انتخاب شده باشد. از معادله داریم.

$$P\left(Y / \bar{B}\right)=\frac{P\left(Y \cap \bar{B}\right)}{P\left(\bar{B}\right)}$$

با وجود این، $Y \cap \bar{B}=Y$ زیرا این مهره زرد است و سیاه نیست اگر فقط اگر زرد باشد. بنابراین، با این فرض که انتخاب هر یک از ۲۵ مهره دارای شانس برابر باشد، داریم

$$P\left(Y \middle| \bar{B}\right)=\frac{\frac{5}{25}}{\frac{15}{25}}=\frac{1}{3}$$

باید توجه داشت که این احتمال را می‌توانستیم با در نظر گرفتن فضای نمونه کاهش یافته (فضای نمونه‌ای جدید) به دست آوریم یعنی، در صورتی که می‌دانیم مهره منتخب سیاه نیست، این مسئله به محاسبه این احتمال که «یک مهره که بتصادف از یک کیسه شامل ۱۰ مهره سفید و ۵ مهره زرد بیرون کشیده می‌شود زرد باشد» تبدیل می شود که به روشنی برابر $\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$ است.

وقتی که کلیه پیشامدهای ساده را هم احتمال فرض می‌کنیم، غالباً محاسبه یک احتمال شرطی با در نظر گرفتن فضای نمونه کاهش یافته ساده‌تر از کاربرد مستقیم فرمول شرطی است.

به این مثال از نخستین درس احتمال توجه کنید:

مثال.

در بازی بریج، ۵۲ کارت بطور مساوی بین ۴ بازیکن موسوم به شرق، غرب، شمال و جنوب تقسیم می‌شود. اگر شمال و جنوب بین کارتهایشان کلاً ۸ پیک داشته باشند، احتمال این که شرق، ۳ پیک از ۵ پیک باقیمانده را دارا باشد چقدر است؟

حل.

ساده‌ترین راه برای حل این مسئله احتمالاً استفاده از فضای نمونه کاهش یافته است. یعنی با دانستن این که شمال- جنوب بین ۲۶ کارت خود کلاً ۸ پیک دارند، ۲۶ کارت باقی می‌ماند که دقیقاً ۵ عدد از آنها پیک است که باید بین شرق و غرب توزیع شود. چون هر توزیع هم احتمال است، لذا این احتمال شرطی که شرق دقیقاً ۳ پیک بین ۱۳ کارت خودش داشته باشد برابر است با انتخاب ۳ تا از ۵ پیک و ۱۰ تا از سایر کارتها تقسیم بر کل حالات یعنی:

$$\frac{\binom{5}{3}\binom{21}{10}}{\binom{26}{13}} = .339$$

حال برمی‌گردیم به همان اولین مسئله این قسمت، (حسن آقا!) فرض کنیم می‌دانیم حسن آقا دو فرزند دارد که در میان آنها حداقل یک پسرد ارد. بنابراین، اگر $E$ پیشامدی را که هر دو فرزند پسرند و $F$ پیشامدی را که لااقل یکی از آنها پسر است نمایش دهند، احتمال مطلوب $P(E|F)$ از رابطه زیر به دست می آید.

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

$$= \frac{P(\{(b,b)\})}{P(\{(b,b),(b,g),(g,b)\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

در نمودار روبرو $b$ معادل پسر و $g$ معادل دختر می‌باشد.

همانطور که گفته شد، بسیاری به غلط استدلال می‌کنند که این احتمال شرطی دو پسر برابر $\frac{1}{2}$ است، در صورتی که احتمال صحیح آن $\frac{1}{3}$ است، زیرا دلیل این گروه آن است که آن فرزند حسن آقا که دیده نشده است با

احتمال مساوی پسر یا دختر است. زیرا در ابتدا ۴ برآمد هم احتمال وجود داشت. اکنون، آگاهی از این که حداقل یک فرزند پسر است با دانستن این که این برآمد(د, د) نیست هم‌ارز است. بنابراین برای ماسه برآمد هم احتمال (پ و پ) و (پ و د) و (د و پ) باقی می‌ماند که نشان می‌دهد این فرزند حسن آقا که دیده نشده احتمال دختر بودنش دو برابر پسر بودن است.

نکته: اگر هر دو طرف فرمول احتمال شرطی را در $P(F)$ ضرب کنیم، حاصل می‌شود.

$$P(EF)=P(F)P(E|F)$$

معادله بالا بیانگر آن است که احتمال رویداد $E$ و $F$ برابر احتمال رویداد $F$ ضرب در احتمال شرطی $E$ در صورتی که می‌دانیم $F$ رخ داده است می‌باشد. معادله بالا غالباً در محاسبه احتمال اشتراک پیشامدها بسیار مفید است که در آینده به آن می‌رسیم.

چند مثال دیگر از کتب معرفی شده:

مثال.

مریم در این که درس فرانسه یا درس شیمی را انتخاب کند تردید دارد. با وجودی که وی شیمی را ترجیح می‌دهد ولی در ارزیابی که دارد احتمال گرفتن نمره (آ) در درس فرانسه را $\frac{1}{2}$ و در درس شیمی را تنها $\frac{1}{3}$ می‌داند. اگر مریم تصمیم خود را براساس پرتاب یک سکه سالم بگیرد، احتمال اینکه وی در درس شیمی نمره (آ) بگیرد چقدر است؟

حل.

اگر فرض کنیم $C$ پیشامدی که مریم شیمی را انتخاب کند و $A$ پیشامدی که وی از هر درسی انتخاب کرده است نمره (آ) بگیرد را نشان می دهند، آن‌گاه احتمال مطلوب برابر $P(C\cap A)$ است. این احتمال با استفاده از معادله بالا به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$P(C\cap A)=P(C)P(A|C)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$$

مثال.

فرض کنید کیسه‌ای شامل ۸ گلوله قرمز و ۴ گلوله سفید است.دو گلوله بدون جایگذاری از کیسه بیرون می‌آوریـم. اگر در هر استخراج احتمال انتخاب شدن هر گلوله در کیسه برابر باشد، احتمال این که هر دو گلوله استخراج شده قرمز باشند چقدر است؟

حل.

فرض کنید $R_1$ و $R_2$ به ترتیب پیشامدهایی را که گلوله اول و دوم استخراج شـده قرمـز اسـت نمـایش می‌دهد. اکنون با دانستن این که گلوله اول استخراج شده قرمز است، پس گلوله‌های باقیمانده در کیسه ۷ قرمز و ۴ سفید است و بنابراین $R(R_2|R_1)=\frac{7}{11}$. چون واضح است که $P(R_l)=\frac{8}{12}$، احتمال مطلوب عبارت است از

$$P(R_1\cap R_2)=P(R_1)P(R_2|R_1)$$
$$=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{7}{11}\right)=\frac{14}{33}$$

حتماً شما هم قبول دارید که حل این مسئله بدون کمک از فرمول اخیر ساده‌تر بود! ولی برای تمرین با این فرمول حل کردیم، روش دیگر آن استفاده از ترکیب است: تعداد حالات مطلوب برابر است با انتخاب ۲ گلولـه از ۸ گلوله قرمز به کل حالات یعنی دو گلوله از دوازده گلوله یعنی:

$$P(E)=\frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}}=\frac{14}{33}$$

حال به ادامه بحث و بخش‌های بعدی می‌رویم.